HMUL8R6B: Information Retrieval
Multimedia Indexing and Retrieval

A. Rappels mathématiques

Georges Quénot and Philippe Mulhem
Multimedia Information Indexing and Retrieval Group

Laboratoire d'Informatique de Grenoble

Mars 2019

Algèbre linéaire 1

- Espace Vectoriel (EV) V de de dimension n sur un corps K (R ou C), isomorphe à K^n
- Scalaire : élément de K
- Vecteur : élément de V
- Addition de vecteurs
- Multiplication d'un vecteur par un scalaire
- Applications ou formes linéaires:
  - $f(x+y) = f(x) + f(y)$
  - $f(ax) = af(x)$
- Applications : EV $\rightarrow$ EV, formes : EV $\rightarrow$ K
- Aussi : espaces vectoriels de dimension infinie

Algèbre linéaire 2

- Vecteurs colonnes : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T$
- Vecteurs lignes : $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T$
- Vecteur ligne : composantes d'un vecteur "normal"
- Vecteur colonne : composantes d'une forme linéaire
- Formes linéaires et vecteurs "normaux" appartiennent à des espaces vectoriels "duaux"
- Transposition : permutation des lignes et des colonnes

Algèbre linéaire 3

- Multiplications (1) :
  - Vecteur **ligne** × vecteur **colonne** → scalaire
    $s = \sum_j x_j \, y_j = (x_i)(y_j) = X.Y$
  - Matrice × vecteur colonne → vecteur colonne
    $Y = (y_i) = \left(\sum_j m_{ij} \, x_j\right) = (m_{ij})(x_j) = M.X$
  - Vecteur ligne × matrice → vecteur ligne
    $Y = (y_j) = \left(\sum_i m_{ij} \, x_i\right) = (x_i)(m_{ij}) = X.M$
  - Matrice × matrice → matrice
    $C = (c_{ij}) = \left(\sum_k a_{ik} \, b_{kj}\right) = (a_{ik})(b_{kj}) = A.B$
- Dans tout ces cas le produit est "contractant"
- Contraintes sur les dimensions des objets (égalité des dimensions "contractées")

Algèbre linéaire 4

- Multiplications (2) :
  - Vecteur **colonne** × vecteur **ligne** → matrice
    $M = (m_{ij}) = (y_i x_j) = (y_i)(x_j) = Y.X$ (pas de somme)
- Produit (colonne × ligne) dit "dyadique" ou "tensoriel" ou "de Kronecker", non "contractant" par opposition au produit (ligne × colonne) dit "scalaire" qui l'est

- Multiplications (3) :
  - Vecteur × vecteur → vecteur
    $Z = (z_i) = (x_i y_i) = (x_i)(y_i) = X \circ Y$ (pas de somme)
- Produit (vecteur × vecteur) "point à point", dit "de Hadamard", vecteurs en général de même type
- Possible aussi sur matrices ou sur tenseurs

Algèbre linéaire 5

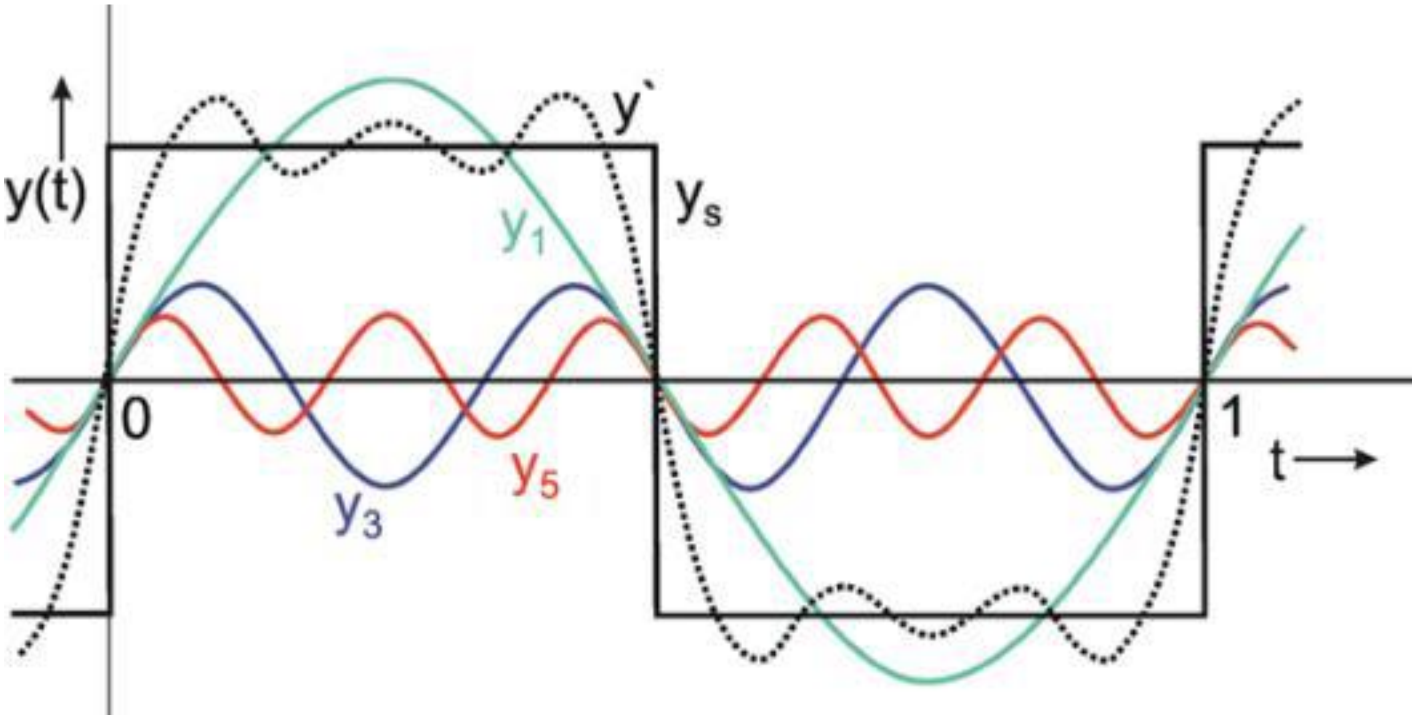
- Vecteur propre v et valeur propre λ :
  $f(v) = \lambda v$
- Matrice et vecteur :
  $A.X = \lambda X$
- Diagonalisation : base de vecteurs propres (e_i) associé à des valeurs propres (λ_i) tels que $f(e_i) = \lambda_i e_i$
- Diagonalisation possible avec une base de vecteurs propres orthonormée possible si la matrice A et symétrique et définie positive (dans eu repère Euclidien)
- La matrice est diagonale dans la base formée des vecteurs propres

Transformée de Fourier 1

- Toute fonction "ayant de bonnes propriétés" s'écrit comme une combinaison linéaire (finie ou infinie) de fonctions sinusoïdales (décomposition de Fourier)
- L'ensemble des fonctions "ayant de bonnes propriétés" est un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie)
- La transformée de Fourier est une application linéaire de l'espace des fonctions initial vers l'espace transformé
- Trois classes de fonctions selon le type de signal:
  – Continu non périodique
  – Continu périodique
  – Discret périodique

Transformée de Fourier 2

Exemple : décomposition en série de Fourier



Transformée de Fourier 3

- Trois classes de fonctions (cas d'un signal monodimensionnel):
  - Signal continu non périodique, intégrale infinie :
    $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi ux} F(u) du$ (complexe)
  - Signal continu périodique (2π), somme infinie :
    $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{inx} F(n)$ (complexe) ou
    $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ (réel)
  - Signal discret périodique (N valeurs entières de x, f et F sont des vecteurs de dimension N), somme finie :
    $f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{inx} F(n) \quad 0 \leq x < N$ (complexe)
- Transformée directe : $f \rightarrow F$, inverse : $F \rightarrow f$

Transformée de Fourier 4

- Les fonctions "sinusoïde" forment une base orthonormée de l'espace vectoriel des fonctions "ayant de bonnes propriétés", e.g.
  - Signal continu périodique (2π) :
    $f_n(x) = e^{inx}$ pour $n \in Z$ (complexe) ou
    $f_n(x) = \cos nx$ pour $n \in N$ et
    $g_n(x) = \sin nx$ pour $n \in N^*$ (réel)
  - Calcul des coefficients :
    $F(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}dx$
    $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$
    $b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$

Transformée de Fourier 5

- Transformée cosinus d'une fonction réelle, cas d'un signal monodimensionnel périodique discret, N valeurs :
  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} C(n) \cos \frac{(2x+1)n\pi}{2N} F(n)$
  avec $C(n) = 1$ si $n = 0$ et $C(n) = \sqrt{2}$ si $n \neq 0$
  $0 \leq x < N$ et $0 \leq n < N$
- Seulement des fonctions cosinus mais deux fois plus
- Cas d'un signal bidimensionnel, $N \; x \; M$ valeurs:
  $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} C(n)C(m) \cos \frac{(2x+1)n\pi}{2N} \cos \frac{(2y+1)m\pi}{2M} F(n,m)$
  $0 \leq x < N$ et $0 \leq y < M$ et $0 \leq n < N$ et $0 \leq m < M$
- Transformée initiale (directe) :
  $F(n,m) = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} C(x)C(y) \cos \frac{(2x+1)n\pi}{2N} \cos \frac{(2y+1)m\pi}{2M} f(x,y)$